О. М. Омельян

Российский государственный университет им. И. Канта,
olga_ omelyan2002@mail.ru

О КРИВИЗНЕ СВЯЗНОСТИ 2-ГО ТИПА НА РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПЛОСКОСТЕЙ

В работе индексы принимают следующие значения:

$$I, \ldots = \overline{1, n};\ i, \ldots = \overline{1, m};\ a, \ldots = \overline{m+1, n}.$$

1. В n-мерном проективном пространстве P_n мы будем рассматривать распределение NS_n [1, 2] m-мерных центрированных плоскостей P_m^*, которое определяется уравнениями $\omega_i^a = \Lambda_{iJ}^a \omega^J$, а компоненты фундаментального объекта 1-го порядка распределения удолетворяют следующим уравнениям:

$$\Delta\Lambda_{iJ}^a - \delta_J^a \omega_i \equiv 0;\ \Delta\Lambda_{iJ}^a = d\Lambda_{iJ}^a - \Lambda_{jJ}^a \omega_i^j - \Lambda_{iK}^a \omega_J^K + \Lambda_{iJ}^b \omega_b^a,$$

где δ_J^a — обобщенный символ Кронекера.

Ранее было произведено композиционное оснащение распределения NS_n [3, 4]. Оно состоит в задании на нем аналогов плоскостей Картана и нормалей 2-го рода Нордена, а именно,

$$C_{n-m-1} : P_m^* \oplus C_{n-m-1} = P_n, \quad N_{m-1} : A \oplus N_{m-1} = P_m^*,$$

где оснащающие плоскости определяются совокупностью точек

$$B_a = A_a + \lambda_a^i A_i + \lambda_a A, \quad B_i = A_i + \lambda_i A.$$

Объект $\lambda = \{\lambda_a^i, \lambda_a, \lambda_i\}$ является оснащающим квазитензором, содержащим 3 подквазитензора λ_a^i, $\{\lambda_a^i, \lambda_a\}$ и λ_i. Выражения для дифференциалов точек B_a и B_i имеют следующий вид:

$$dB_a = (\ldots)_a^b B_b + t_{aJ}^i \omega^J B_i + (t_{aI} - \lambda_i t_{aI}^i)\omega^I A,$$
$$dB_i = (\ldots)_i^j B_j + (\ldots)_{iI}^a \omega^I B_a + t_{iJ}\omega^J A,$$

где компоненты тензора неспециальных смещений $t = \{t_{aJ}^i, t_{aI}, t_{iJ}\}$ [3] являются функциями от фундаментального объекта 1-го порядка Λ^1 распределения NS_n, оснащающего квазитензора λ и пфаффовых производных $\lambda' = \{\lambda_{aJ}^i, \lambda_{aI}, \lambda_{iJ}\}$ оснащающего квазитензора, т. е. $t = t(\Lambda^1, \lambda, \lambda')$. Тензор t содержит ряд подтензоров. Обращение тензора t в нуль геометрически означает неподвижность пары плоскостей (C_{n-m-1}, P_{n-1}), где гиперплоскость Бортолотти представляет плоскость, натянутую на плоскость Картана (C_{n-m-1}) и нормаль 2-го рода Нордена N_{m-1}, а именно, $P_{n-1} = [B_a, B_i]$.

2. С распределением плоскостей ассоциировано главное расслоение $G(U_n)$ [2], базой которого является область U_n проективного пространства P_n, описанная центром плоскости P_m^*, а типовым слоем — подгруппа стационарности G некоторой фиксированной центрированной плоскости P_m^*. В этом расслоении способом Г. Ф. Лаптева (приемом Ю. Г. Лумисте) [4] задана связность с помощью форм связности $\tilde{\omega} = \omega - \Gamma_K \omega^K$, где $\tilde{\omega} = \{\tilde{\omega}_j^i, \tilde{\omega}_i, \tilde{\omega}_b^a, \tilde{\omega}_a^i, \tilde{\omega}_a\}$. Компоненты объекта связности $\Gamma = \{\Gamma_{jk}^i, \Gamma_{ja}^i, \Gamma_{ij}, \Gamma_{ia}, \Gamma_{bi}^a, \Gamma_{bc}^a, \Gamma_{aj}^i, \Gamma_{ab}^i, \Gamma_{ai}, \Gamma_{ab}\}$ удовлетворяют уравнениям [2], в частности,

$$\Delta\Gamma_{jk}^i + \omega_{jk}^i = \Gamma_{jkI}^i \omega^I, \ \Delta\Gamma_{ja}^i - \Gamma_{jk}^i \omega_a^k + \omega_{ja}^i = \Gamma_{jaI}^i \omega^I, \ \ldots \quad (1)$$

Объект связности Γ содержит ряд подобъектов [2]. Компоненты тензора кривизны $R = \{R_{jkl}^i, R_{jka}^i, R_{jab}^i, \ldots\}$ связности

Γ выражаются [2] через компоненты объекта Γ, их пфаффовы производные и компоненты фундаментального квазитензора Λ^1, к примеру,

$$R^i_{jkl} = \Gamma^i_{j[kl]} - \Gamma^i_{ja}\Lambda^a_{[kl]} - \Gamma^s_{j[k}\Gamma^i_{sl]}, R^i_{jab} = \Gamma^i_{j[ab]} - \Gamma^k_{j[a}\Gamma^i_{kb]}, \quad (2)$$

$$R^i_{jka} = \frac{1}{2}(\Gamma^i_{jka} - \Gamma^i_{jak} - \Gamma^i_{jb}\Lambda^b_{ka}) - \Gamma^l_{j[k}\Gamma^i_{la]}.$$

Тензор кривизны R содержит ряд подтензоров.

3. В работе [3] было доказано, что распределение NS_n и его композиционное оснащение индуцируют в расслоении $G(U_n)$ связность 2-го типа $\overset{02}{\Gamma} = \{\overset{0}{\Gamma}{}^i_{jK}, \overset{02}{\Gamma}_{iJ}, \overset{0}{\Gamma}{}^a_{bI}, \overset{02}{\Gamma}{}^i_{aJ}, \overset{02}{\Gamma}_{aI}\}$ с компонентами, определяемыми по формулам, в частности,

$$\overset{0}{\Gamma}{}^i_{jk} = \Lambda^a_{jk}\lambda^i_a - \delta^i_j\lambda_k - \delta^i_k\lambda_j, \ \overset{02}{\Gamma}_{ij} = \lambda_{ij} + \Lambda^a_{ij}\lambda^k_a\lambda_k - 2\lambda_i\lambda_j, \quad (3)$$

$$\overset{02}{\Gamma}_{ai} = \lambda_{ai} - \lambda_{ji}\lambda^j_a - \Lambda^b_{ji}\lambda^j_a(\lambda_b + \lambda^k_b\lambda_k) + 2\lambda_i\lambda^j_a\lambda_j - \lambda_a\lambda_i.$$

Построим кривизну связности 2-го типа, т. е. получим охваты для компонент тензора кривизны $\overset{02}{R}$ объектом связности $\overset{02}{\Gamma}$. Из выражений (2), определяющих компоненты тензора кривизны R, очевидно, что для начала необходимо найти охваты для пфаффовых производных объекта Γ. Используя уравнения (1), выражения (3) и им аналогичные для компонент объекта связности $\overset{02}{\Gamma}$, находим, что пфаффовы производные охватываются следующим образом:

$$\overset{02}{\Gamma}_{ijk} = (\Lambda^a_{ijk} + \Lambda^a_{ib}\Lambda^b_{jk})\lambda^l_a\lambda_l + \lambda_{ijk} + \Lambda^a_{ij}(\lambda^l_{ak}\lambda_l + \lambda^l_a\lambda_{lk}) - 2\lambda_{ik}\lambda_j - 2\lambda_i\lambda_{jk},$$

$$\overset{02}{\Gamma}_{ija} = (\Lambda^b_{ija} + \Lambda^b_{ic}\Lambda^c_{ja})\lambda^k_b\lambda_k + \lambda_{ija} + \Lambda^b_{ij}(\lambda^k_{ba}\lambda_k + \lambda^k_b\lambda_{ka})$$
$$-2\lambda_{ia}\lambda_j - 2\lambda_i\lambda_{ja}, \ldots \quad (4)$$

Возвращаясь к формулам (2), определяющим тензор кривизны R, мы видим, что для получения выражения охватов компонент тензора кривизны $\overset{02}{R}$ необходимо: 1) найти альтернации соответсвующих пфаффовых производных (4), используя симметрию компонент Λ^a_{iJK} и симметрию пфаффовых производных $\lambda_{iJK}, \lambda^i_{aJK}, \lambda_{aIJ}$ компонент квазитензора λ по двум последним индексам; 2) вычислить свертки соответствующих компонент объектов Γ и Λ^1, а также найти альтернированные свертки соответствующих компонент объекта связности Γ. Итак, выражения охватов компонент тензора кривизны $\overset{02}{R}$ имеют следующий вид:

$$\overset{02}{R}{}_{ijk} = \overset{0}{R}{}^{l}_{ijk}\lambda_l - \Lambda^a_{[jk]}\lambda_{ia}, \quad \overset{02}{R}{}_{iab} = \overset{0}{R}{}^{j}_{iab}\lambda_j,$$

$$\overset{02}{R}{}^{i}_{ajk} = \overset{0}{R}{}^{b}_{ajk}\lambda^i_b - \overset{0}{R}{}^{i}_{ljk}\lambda^l_a - \Lambda^b_{[jk]}\lambda^i_{ab}, \overset{02}{R}{}^{i}_{abc} = \overset{0}{R}{}^{d}_{abc}\lambda^i_d - \overset{0}{R}{}^{i}_{jbc}\lambda^j_a,$$

$$\overset{02}{R}{}_{aij} = \overset{0}{R}{}^{b}_{aij}\lambda_b - \overset{0}{R}{}^{l}_{kij}\lambda^k_a\lambda_l - \Lambda^b_{[ij]}(\lambda_{ab} - \lambda_{kb}\lambda^k_a), \tag{5}$$

$$\overset{02}{R}{}_{abc} = \overset{0}{R}{}^{d}_{abc}\lambda_d - \overset{0}{R}{}^{j}_{ibc}\lambda^i_a\lambda_j, \ldots$$

Таким образом, мы построили кривизну связности 2-го типа $\overset{02}{R}$, индуцированную композиционным оснащением распределения NS_n.

Теорема 1. *В случае голономного распределения* ($\Lambda^a_{[ij]} = 0$) *при обращении в нуль тензоров кривизны плоскостной* $\overset{0}{R}{}^{i}_{jKL}$ *и нормальной* $\overset{0}{R}{}^{a}_{bIJ}$ *линейных связностей кривизна* $\overset{02}{R}$ *обращается в нуль.*

Теорема 2. *Неподвижность пары плоскостей, а именно, плоскости Картана и гиперплоскости Бортолотти* ($t = 0$) *в случае голономного распределения влечет обращение в нуль тензора кривизны связности 2-го типа.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаптев Г. Ф., Остиану Н. М. *Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. I* // Тр. геом. семинара. – М.: ВИНИТИ, 1971. – Т. 3. – С. 49-94.

2. Омельян О.М. *Нетензорность объекта кривизны групповой связности на распределении плоскостей* // Диф. геом. многообр. фигур. – Калининград, 2002. – №33. – С. 74 - 78.

3. Омельян О. М. *Четыре индуцированных связности на распределении плоскостей* // Межд. конф. по геом. и анализу. – Пенза, 2003. – С. 63-69.

4. Омельян О. М. *Пучки связностей 1-го и 2-го типов, индуцированные композиционным оснащением распределения плоскостей* // Движения в обобщенных пространствах. – Пенза, 2005. – С. 94-101.

Е. А. Осипов

Казанский (Приволжский) федеральный университет,

Evgenij.Osipov@ksu.ru

СУММАТОРНЫЕ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ УПРУГИХ ВОЛН В ПРОСТРАНСТВЕ

В работе рассмотрена трехмерная задача дифракции упругой волны на двоякопериодической системе дефектов. Опираясь на результаты, полученные в работе [1 – 3], показано, как свести задачу к двум парам парных сумматорных уравнений и к паре интегральных уравнений с логарифмическими особенностями в ядрах.